|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Әдістемелік нұсқау | Н 2-1-31-2021  1 баспа 05.01.2021 | logo_DU2.png |

#### Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

**М.Х.Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті**

##### БЕКІТЕМІН

Кафедра меңгерушісі

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

/қолы/ /аты-жөні./

«\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_ж.

Өзіндік жумыстарды орындау үшін

/жұмыстың атауы/

«Қолданбалы оңтайландыру әдістері»

/пәннің атауы/

«Информатика және ақпараттық-коммуникациялық технологиялар»

/мамандық шифры/

мамандығының білімгерлері үшін

#### ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУ

Тараз 2021

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Әдістемелік нұсқау | Н ТарМУ 11/1-1.01-2018  1 баспа 05.05.2018 |  |

Әдістемелік нұсқау өзіндік жұмыстарды орындау үшін

/зертханалық жұмыстың атауы/

«Қолданбалы оңтайландыру әдістері»

/пәннің атауы/

«Информатика және ақпараттық-коммуникациялық технологиялар» мамандығының білімгерлері үшін пәннің оқу бағдарламасына

/мамандық шифры/ сәйкес жасалған.

Әдістемелік нұсқауды құрастырушылар:

Абдимомынова Маншук Максутовна \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

/аты-жөні/ /қолы/

Әдістемелік нұсқау «Қолданбалы информатика және бағдарламалау» кафедра мәжілісінде талқыланды.

/кафедра атауы/

Хаттама №\_\_\_\_\_ «\_\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_201\_\_ ж

**Студенттердің өзіндік жұмысын орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар**

**№1 СӨЖ. Сызықты программалау есептерін шешу**

Операцияны зерттеу есептері екі категорияға бөлінеді: а) тура және б) кері. Тура есептер келесі сұрақтарға жауап береді: егер берілген шартқа сәйкес х  х шешімін алатын болсақ, онда w тиімділік көрсеткіші неге тең болады?

Мұндай есептерді шығару үшін бір немесе бірнеше тиімділік көрсеткішін өрнектейтін математикалық модель құрылады.

Кері есептер келесі сұрақтарға жауап береді: w тиімділік көрсеткіші максимум мәнге айналу үшін х шешімін қалай таңдау қажет?

Шындығында, тура есептер кері есептерге қарағанда әлдеқайда оңай. Кері есептерді шығару үшін тура есептерді шығара білу шарт.

Операцияны зерттеудің кері есептерін оптималдау үшін есептің қойылуын жалпы түрде қарастырайық. Мысалы: х шешімдерін таңдай отырып, біз әсер ете алатын бір а операциясы бар делік (х – параметрлер тобы болсын). Операция тиімділігі бір көрсеткішпен сипатталсын w – max.

Операция шарты түгелдей белгілі болған «анықталған» деп аталатын ең қарапайым жағдайды алайық. Ол кезде операция табысы тәуелді болатын барлық факторлар екі топқа бөлінеді:

1. алдын – ала берілген белгілі факторлар, оны қысқаша  деп белгілейік;
2. х – шешімдер жиынын құрайтын, бізден тәуелді шешім элементтері.

Егер дұрыстап қарасақ, бірінші топтағы факторларға шектеулер енетіндігін көреміз, яғни х шешімінің мүмкін облысын анықтайды.

W – тиімділік көрсеткіші екі топ факторларынан тәуелді. Оны келесі формула түрінде көрсетуге болады:

W = w (, х) (4.1).

Мұндағы х және  жалпы жағдайда сан ғана емес, ал сандар жиыны. Берілген  шартына шешім элементіне әсер ететін шектеулер қойылады, олар теңдеу немесе теңсіздік түрінде болады.

(4.1) тәуелділігі тура және оның шешімі алынсын делік. Онда кері тәуелділік келесі түрде формулаланады.

Берілген  шарттарының нәтижесінде w тиімділік көрсеткішін максимумға айналдыратын Х=X\* шешімін табу қажет.

Ол максимум келесі түрде өрнектеледі:

W\*=max {W(,x)} (4.2)

XX

(4.2) формула былай оқылады: W\*- Х-тің мүмкін шешімдер жиынына енетін W(,x) мәндерінің максимал мәні

Сонымен, функцияның немесе функционалдың максимум мәнін табатын математикалық есеп алдық. Мұндай есептер математикада жақсы өңделген «вариациялық» есептер класына жатады. Мұндай қарапайым есептер көпшілікке мәлім.

Көп аргументті функцияның максимум немесе минимум мәнін табу үшін, әрбір аргумент бойынша дифференциалдаймыз және туындыларын нөлге теңеу арқылы теңдеулер жүйелерінің шешімін аламыз. Былайша қарағанда оңай сияқты. Бірақ мұндай классикалық әдіс операцияны зерттеуде аз қолданылады. Біріншіден аргумент көп болған кезде теңдеулер жүйесі күрделенеді, экстремум іздеу қиындайды.

Екіншіден, шешім элементтеріне шектеулер қойылғанда экстремум туындының нөльге тең нүктесінде емес, Х облысының шекарасында табылады.

Кейбір есптерде W функцияның туындысы табылмауы мүмкін. Соның бәрі экстремум іздеу есептерін қиындата түседі.

Х\* оптимал шешімін табатын экстремум іздеу есептері, W функциясының ерекшеліктеріне және шешімге қойылатын шектеулер түрлеріне тәуелді. Мысалы, егер W функциясы Х1 Х2 ,..., шешім элементтерінен сызықты тәуелді болса, және Х1 ,Х2 ,..., қойылатын шектеулер сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде берілсе, онда стандартты әдістермен шешілетін классикалық сызықтық программалау есебі алынады.

Егер W функциясы дөңес болса, онда арнайы әдістер «квадраттық программалау» әдістерімен шығарылады. Операцияның көп этапты басқаруын оптималдау үшін динамикалық программалау әдістері қолданылады. Сонымен қатар экстремум табатын сандық әдістер де бар, олар ЭЕМ арнайы бағдарламалары арқылы жүзеге асады. Сонымен қатар оптимал табу есептері классикалық вариациялық (шектеулері бар немесе жоқ) таза математикалық есептерге келтіріледі, оларды есептеу техникаларында шығару аса қиындық туғызбайды. Ал элементтер анықталмаған жағдайда есептер мүлдем өзгеше.

**Анықталмағандық жағдайында шешімдерді таңдау мәселелері.**

Алдыңғы параграфта операцияны зерттеудің анықталғандық жағдайындағы кері есебін қарастырдық, онда тиімділік көрсеткіші W екі топ факторларынан ғана тәуелді болды: берілген, алдын-ала берілген  мен шешім элементтері Х. Операцияны зерттеудің нақты есептеріне бұл топтан басқа-белгісіз факторлар жиыны енеді оны деп белгілейік. Сонымен W тиімділік көрсеткіші үш топ факторларынан тәуелді W=W(,x, ). (5.1)

W шамасы белгісіз  факторларынан тәуелді болған соң,  және х шамасы белгілі болған күннің өзінде анықталмай қалады. Оптимал шешімін іздеу есебі де анықталмағандық жағдайға ұшырайды. W белгісіз шамасын максималдау мүмкін емес қой! Қандай жағдай болса да белгісіз шаманы максималдауға тура келеді. Осы айтылғандарды математика тіліне аударсақ, келесі есепті аламыз.

Берілген  шарты бойынша белгісіз  шартын есепке ала отырып, W тиімділік көрсеткішіне максимал мән әперетін ХХ шешімдерін табу қажет.

Анықталмаған  факторларының енуін есептің шешімін анықталмағандық жағдайда табу болып табылады.

Бірақ қандай жағдайда болса да жақсы ма, нашар ма, әйтеуір шешім қабылдануы керек. Сондықтан әйгілі шетелдік операцияны зерттеу маманы

Т.Л. Саати өз пәні туралы былай деген:

«Операцияны зерттеу тәжрибелік сұрақтарға нашар жауап беру өнері, ал басқа әдістермен одан да нашар жауап алынуы мүмкін».

Анықталмағандық жағдайында шешім қабылдау өмірде жиі кездеседі. Мысалы біз саяхатқа шығу үшін чемоданға заттарымызды жинақтайық. Чемодан салмағы, заттар жиыны (шарты) белгілі, ол баратын жердегі ауа райы белгісіз (шарты). Қандай киімдер (х) алу қажет? Бұл есеп ешбір математикасыз шешілгенімен, сыртқы түрі операцияны зерттеу есептеріне ұқсас. Сонымен қатар жас адамды алатын болсақ, ол көрген қызықтарын максималдағысы келеді, ол қарт кісілер ауыру ықтималдығын минималдағысы келеді.

Келесі есепті қарастырайық. Жәрмеңкеде сату үшін тауар ассортименті жоспарлансын. Пайданы максималдау керек. Бірақ сатып алушылар мен тұтыным мөлшері белгісіз. Бәрі анықталмағандық, қалай шешім қабылдау керек? Тағы бір есеп берілсін: бірнеше жылға қарулану жоспары жасалынады делік. Бірақ қарсы жақ та, оның қаруы да белгісіз. Қандай шешім қабылдануы керек?

Мұндай есептерге шешім қабылдаудың әртүрлі тәсілдері бар. Яғни белгісіз факторлары ықтималдық теориясындағы кездейоқ шамалар болатын болса, онда олар стохастикалық есептер деп аталып, анықталмағандық-стохастикалық анықталмағандық деп аталады. Стохастикалық операцияны зерттеу есебіне мысал келтірейік. Асханаға келушілерді көбірек қабылдау үшін жұмысын қайта ұйымдастыру қаралып отыр. Күнделікті асханаға келетін жұмысшы саны белгісіз, және олар келгенде қандай тамақ түрін дайындау керек және қанша уақыт қызмет көрсетілуі қажет. Бұл кездейсоқ шамалардың мәні белгісіз болса, онда стохастикалық жолмен табылуы ықтимал. Осы анықталамағандықты нақты түсіндірейік. Белгісіз  факторлары кездейсоқ шамалар, олардың ықтималдық сипаттамалары-үлестіру заңы, математикалық күтілу, дисперсия т.б. анықталсын. Онда W тиімділік көрсеткіші осы факторлардан тәуелді болатын кездейсоқ шама болады. Кездейсоқ шаманы максималдау мүмкін емес: Х-тің кез келген шешімінде ол да кездейсоқ болса не істеу керек?

Егер кездейсоқ шамаларды олардың орта мәндерімен ауыстырсақ есеп анықталғандық түр алады және оны кәдімгі әдістермен шығаруға болады.

Тәжрибе жүзінде көптеген физиканың, механиканың, техниканың есептері олардың орта мәндерімен алмастырылып шығарылады.

Сонымен Q операциясын қарастырайық, оған  «кездейсоқ факторлары» әсер ететін болса, онда W тиімділік көрсеткіші де кездейсоқ болады.

Келесідей ой туады: тиімділік көрсеткішіне орта мән алынатын болса, онда ол математикалық күтілу =M[W] інде жазылады және =M[W(,x, )] max

мәнге айналдыратын х шешімін іздеу қажет.

Көптеген жағдайларда мұндай тәсіл есеп шартын қанағаттандырады. Сол кезде анықталмағандық элементін не істеу керек? Әрбір жеке операцияның тиімділігі  кездейсоқ факторларының мәндерінен тәуелді. Ал бұл жерде біз «орташа » мәндерді оптималдай отырып, көп рет қайталаған соң дұрыс шешімін табуымыз мүмкін. «Орта мәндер бойынша оптималдау» операцияны зерттеудің стохастикалық есептерінде кеңінен қолданылады.

Келесі есепті қарастырайық. Үлкен қалада жедел жәрдем көмегін көресту үшін автоматтандырылған басқару жүйесі (АБЖ) ұйымдастырылсын. Қаланың әртүрлі аудандарында түскен тапсырмалар орталық басқару пунктіне жіберіледі.

АБЖ диспетчер қызметін тиімді болатындай етіп алгоритм (ереже) құру қажет. Тиімділік көрсетікішін W деп алсақ, дәрігерді күту уақыты Т болсын. Т-кездейсоқ шама. Егер «орташа оптималдауды» алатын болсақ, онда күту уақыты минимал болатын алгоритмді таңдау қажет сияқты. Бірақ жеке аурулардың дәрігерді күту уақыты өзара қосылмайды. Бір ауруға дәрігер тез барып, екіншісі өте ұзақ уақыт күтуі мүмкін. Ондай келеңсіз жағдайды болдырмас үшін Т күту уақытына бір to шектеу қою шарт. Яғни Т-кездейсоқ шама болғандықтан Tto шартын қанағаттандырсын делік және ең үлкен ықтималдықпен орындалсын.

Оған  мәнін берейік, ол 1-ге жақын болсын (0,99 немесе 0,995), ондай оқиға тәжрибе жүзінде шындыққа жанасады, Х шешімдерінің арасында бұл шартты қанағаттандырмайтын шешім жоқ деген сөз. Мұндай шектеулер стохастикалық шекетеулер деп аталады және ондай шектеулердің болуы оптималдау есебін өте күрделендіреді.

Алдынғы тарауларда операцияны зерттеу есептерімен және олардың жіктелуі, шешімі қалай табылатындығы туралы танысып өттік. Ары қарай операцияны зерттеуде жиі қолданылатын математикалық әдістерді қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген ең қарапайым есептерде тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) екі топ параметрлерінен тәуелді болады, берілген шарт  және шешім элементтері х, яғни

W=W(,x). (6.1)

-шартында есеп шешіміне шектеулер бар. Х шешімі х1,х2,…,хn n-шешім элементінен тұрсын

Х(х1,х2,…хn)

Осы табылған х1,х2,…хn мәндері W шамасын максимум немесе минимум мәндеріне айналдыратын болсын. (экстремум).

Мұндай есептер-шектеулері берілген жағдайда функцияның экстремум мәнін қамтамасыз ететін параметрлерді анықтау математикалық программалау есептері деп аталады. Математикалық программалау есептерін шешуде туатын қиындықтар келесілерден тәуелді:

а) шешім элементтерімен байланыстыратын W функционалының түрінен;

б) есеп «өлшемінен», яғни х1,х2,…хn

в) шешім элементтеріне қойылған шектеулер түрі мен санынан.

Математикалық программалау есептерінің ішінде ең кең тарағаны сызықтық программалау есептері.

Оларды сипаттайтындар: а) W тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) х1,х2,…хn шешім элементтерінен сызықты тәуелді; б) шешім элементтеріне қойылатын шектеулер х1,х2,…хn-ге сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде беріледі.

Мұндай есептер өмірде жиі кездеседі, мысалы қорлады үлестіру, өндірісті жоспарлау, көлік жұмысын ұйымдастыру т.б. Шындығында тәжрибе жүзінде көптеген есептерде “шығындар” мен “табыстар” сатып алынған қорлар санына сызықты тәуелді. Бұдан тәжрибеде кездесетін тәуелділіктің бәрі сызықты болады деген ой тумауы керек.

***Концептуалды модель*** деп сапалы оптимальді критерийдің жиынтығын айтамыз. Басқаша айтқанда, концептуалды модель шарттың орындалуы қандай факторға байланысты екендігін анықтайды. Концептуалды модель болашақ математикалық модельдің «идеологиялық» негізі болып табылады.

Мақсат және критерийді формулалау процедурасын қарастырмас бұрын материалды ары қарай түсінуге көмектесетін жалпы жағдайларды қарастырайық.

Ұйымдастырушы экономикалық класына жататын кез келген объект басқару жүйесі болып табылады. Басқару жүйесін жоспарлау, реттеу, есеп, бақылау, анализге

1-суретте басқару объектісі, басқару органы және ақпараттық бөлімі қосылған кері байланыспен басқару жүйесінің оңайлатылған схемасы көрсетілген.

Егер де объект ретінде цехты қарастыратын болсақ, онда басқару бөлімшелерінің қимылы оған жоспарлы көрсеткіштер және цех ресурстары болып табылады (2-сур.). Мұндай жағдайда объекттің өркндеу мақсаты жоғары деңгейлі жүйенің мақсатынан шығады немесе олармен логикалық қарама-қарсы пікірде болады.

Шығындардың нәтижесінің байланыс формасы немесе оптимальдық критерийінің формасы қазіргі таңда 5 принципті ұстанады. Формулалары:

1-принцип: E=R-C → max

2-принцип: R/C → max

3-принцип: E=R → max, C<=Cmax

4-принцип: E=C → min, R>=Rmin

5-принцип: E= ∆R/ ∆C → max

Сызықтық программалаудың негізгі есебінің шешімін табуды графикте көрсетейік, ол геометриялық интерпретацияны береді. Мысалы m-теңдеулер саны n-айнымалылар санынан 2 санға кем болсын (n-m=r=2).

Мұндай дара жағдайда сызықтық программалаудың негізгі есебінің жазықтықта геометриялық интерпретациясын көрсетуге мүмкіндік береді.

Егер (3.1) шартындағы m-сызықтық тәуелсіз теңдеулерді m-базистік айнымалыларына сәйкес шығаратын болсақ, онда қалған бос белгісіздерді n-m=r солар арқылы өрнектеуге болады. Бос айнымалылар х1 және х2, ал қалған айнымалылар х3, х4, ...,хn , базистік болсын дейік.

Онда (3.1) m теңдеудің орнына х3, х4, ...,хn сәйкес жазылған m теңдеу аламыз.

 (3.1)

Бос айнымалылардың жұп мәндерін координатасын х1 және х2 болатын нүктемен бейнелейміз. (х2=0)

х2

(х1;х2)

0 х1

Сурет 3.1

Сурет 3.1 х1 және х2 айнымалыларына теріс еместік шарты қойылғандықтан, бос айнымалылардың мүмкін мәндері ОХ1-осінен жоғары, ОХ2 осінің оң жағында жатады. Содан соң Х1ОХ2 жазықтығында шешімдердің мүмкін облысының болатындығын көрсетейік. х3,х4,...,хn базистік айнымалылары да теріс емес және (3.3) теңдеулерін қанағаттандыруы тиіс. Мұндағы әрбір теңдеу мүмкін шешімдер облысын шектейді. Шындығында (3.1) бірінші теңдеуіндегі х3=0 деп алатын болсақ, онда сызықтық теңдеуін аламыз. Бұл түзуде х3=0, оның бір жағында х3<0, екінші жағында - х3>0 жағын штрихпен белгілейік (сурет 3.2). Оның оң жағы х3=0 түзуінен жоғары жатсын делік, яғни ол кезде мүмкін шешімдер облысы (МШО) бірінші координаттық бұрышта және х3=0 түзуінен жоғары жатады.

Х2

Х1

х1

Сурет 3.2

(3.1) басқа шарттарын да осылай көрсететін болсақ, «мүмкін» жартылай жазықтықтарды келесі суреттегідей түрде көреміз.

х2

х4=0

МШО х6=0

Х5=0

0 Х3=0 х1

Сурет 3.3

Сонымен біз n түзу жүргіздік :

ОХ1 және ОХ2 координатында және n-2 түзу Х3=0, х4=0, х5=0,..., хn=0

Оның әрқайсысы шешім жататын «мүмкін» жартылай жазықтықта анықтайды. Бірінші координаттық бұрышта осы жартылай жазықтықтар жазықтықтарды қанағаттандыратын облыс мүмкін шешімдер облысы болып табылады, яғни (3.1) теңдеулер жүйесінің шешімдері оң болады. Мұндай шешімдер шексіз көп жиын болуы мүмкін, себебі х1 және х2 базистік айнымалылар ретінде анықталады да бос айнымалылардың кез келген мүмкін шешімдер облысынан алынған мәндері сол жиында жатады.

Мүмкін шешімдер облысы бар және ол анықталды деп тұжырымдайық. Олардың арасынан оптимал шешімді қалай табуға болады. Ол үшін (3.2) шартының, яғни Zmax геометриялық интерпретациясын көрсететін (3.3) өрнектерін (3.2) формуласына қойып Z-ті х1,х2 айнымалылары арқылы өрнектейік. Ұқсас мүшелерін біріктірген соң келесі функцияны аламыз:

Z=γ1x1+ γ2x2+ γ0 (3.2)

γ1  және γ2 – белгісіздер коэффиценттері, γ0- бос мүше. Бос мүшені тастап кетуге болатындықтан, келесі функцияның максимум мәнін іздейміз.

Z1=γ1x1+ γ2x2 (3.3)

Z1max шартын геометриялық қалай бейнелейміз. Z1=0 деп алсақ

γ1x1+ γ2x2=0

Түзуі координаттың бас нүктесінен өтеді (3.3), оны «таяныш түзу» деп атайық. Егер біз Z1 түзуіне С1,С2,... Мәндер беретін болсақ, онда бұл түзу өзіне-өзі паралелль қозғалады, бір жағына қарай өседі, екінші жағына қарай кемиді.

3.5 суретте таяныш түзуіне қойылған бағыт, Z1өсу бағытын көрсетеді. Бұл бағыт γ1 және γ2 коэффициенттерінен тәуелді.

х2

х1

0 z=0

3.5 сурет

Таяныш түзуі мен мүмкін шешімдер облысын бір чертежде көрсетейік және таяныш түзуін стрелка бағыты бойынша параллель жылжытатын болсақ (өсу бағыты) максимум қай нүктеде жатуы мүмкін? (3.5 сурет)

3.5 суретте ең жоғарғы деңгейлік түзу А нүктесінен сәйкес келіп тұр, яғни осы нүктеде х\*1, х\*2 бос айнымалылары оптимал мәндерін қабылдайды, ал (3.1) формуласы бойынша қалған айнымалылардың оптимал мәнін табуға болады. (базистік х\*3, х4\*,...,хn\*).  өзінен максимум мәнін МШО-ның бір төбесінде қабылдағандықтан, ол нүктеде базистік айнымалылар нольге тең болады. (біз қарастырып отырған мысалда х3 және х5). Егер А нүктесі арқылы одан көп түзулер өтетін болса, онда сол базистік айнымалылар нолге тең болады. Оптимал шешім табылмайтын жағдай болуы мүмкін бе? Егер мүмкін шешімдер облысы жоғарыдан шектелмеген болса, онда  оптимал мәні табылмайды. Ондай жағдайда келесі (3.7 суреттен) көруге болады. Х2

МШО

0

3.7 сурет

Сонымен қатар оптимал шешімінің жалғыз емес болатын жағдайын қарастырайық. Бұл кезде  максимумы А нүктесінде ғана емес түгелдей АВ кесіндісіне жатуы мүмкін ол =0 түзуіне параллель. Тәжрбие жүзінде мұндай кезде  мүмкін шешімдер облысының бір нүктесінде (А немесе В) табылады.

Сонымен n-m=r=2 болған кездегі сызықтық программалау есебінің геометриялық интерпретациясын қарастыра келіп, көз жеткіздік: Оптимал шешім (егер ол бар болса) мүмкін шешімдер облысының бір төбесінде қабылданады және ол нүктеде х1, х2,...,хn айнымалыларының кем дегенде екеуі нольге тең болады. Бұл ереже n-m=r>2 болған жағдайда да орындалады (тек бұл кезде геометриялық интерпретациясы көрнекті болмайды). Сонымен сызықтық программалаудың жалпы есебінің оптимал шешімі болса, онда х1,х2,...,хn айнымалыларының мәндер жиынының R мәні нольге айналатын нүктеде табылады және қалған мәндері теріс емес болады.

Егер к=2 болса, онда мүмкін мәндер жиыны жазықтықта жататын көпбұрыш, ал оптимал шешім сол көпбұрыштың бір төбесіне жатады.

Егер к=3 болса, онда мүмкін мәндер жиыны көпжақ болады да оптимал шешім сол көпжақтың бір төбесінде болады.

Егер к>3 болса, онда геометриялық интерпретациясы көрнектілігн жоғалтады,бірақ «мүмкін шешімдер көпжақты» терминді қолдануға ыңғайлы болғандықтан пайдалана береміз және к-өлшемді кеңістікте оптимал шешім к-айнымалысы нольге тең болатын көпжақтың бір төбесінде табылады, ал қалған айнымалылары теріс емес болады. Қысқаша бұл төбені «таяныш нүкте» деп айтамыз, ал одан алынатын шешім «таяныш шешім» деп аталады. Тәжірибе жүзінде айнымалылар саны жүздеген немесе мыңдаған болып кездесуі мүмкін.

**№2 СӨЖ. Динамикалық программалау есептерін шешу**

Қорлардың оптималды бөлу моделі, динамикалық объектпен оптималды басқару моделі. Модельді уақыт факторына байланысты ***динамикалық*** және ***статистикалық*** деп екі топқа жіктеуге болады.

***Статистикалық модель деп*** *объект жөнінде алынған ақпараттың белгілі бір уақыт бөлігіндегі үзіндісін айтуға болады.* Мысалы тіс емханасында дәл сол уақыт мезетіндегі оқушылардың тістерінің жағдайы туралы мәлімет береді:бастауыш сыныптағылардың сүт тісі, орта және жоғарғы буындағы оқушылардың емделген, емделуге тиісті тістерінің саны т.б.

***Динамикалық модель*** *– уақыт барысындағы объектінің қасиеттерінөзгерісін көрсету мүмкіндігін береді.* Мысалы, жеке оқушының емханадағы түбіртек кітапшасын динамикалық модель деп айтуға болады. Өйткені осы кітапша бойынша жыл сайын олардың денсаулығындағы болып жатқан өзгерістерді анықтау мүмкіндігі бар.

Үй салу кезінде оның іргетасының қабырғалары мен тіреулерінің үнемі түсіп тұратын күшке шыдамдылығын тексеру керек. Бұл – үйдің статистикалық моделі. Сондай – ақ дауылға, жер сілкінісіне т.б. уақыт факторларына байланысты болатын өзгерістерді де ескеру қажет. Бұл мәселелерді динамикалық модельге сүйене отырып анықтауға болады.

**Ысыту және суыту процестерін модельдеу.**

**Ішкі энергия.**Ішкі энергия *(U)*системаның жалпы энергия қорын сипаттайды. Оның құрамына системаны құрайтын электрондардын, ядролардың, атомдардың, молекулалардың, бөлшектердің өзара әрекеті мен қозғалыстарындағы энергияның барлық түрлері енеді. Әйтсе де ішкі энергияға сыртқы күш өрісіндегі потенциалдык, энергия мен системадағы кинетикалық энергия4енбейді. Оның абсолюттік мәнін ең қарапайым система үшін де анықтау мүмкін емес және термодинамика мақсаты үшін ол керек емес. Система бір күйден екіншіге ауысқан кездегі оның ішкі энергия өзгерісінің мәнін табу маңызды:

U=U2-U1

Қарастырылып отырған процестегі системаның ішкі энергиясы көбейсе (артса), онда U оң, азайса теріс болады.Система өзін қоршаған ортамен әрекеттескенде пайда болатын құбылысты жұмыс дейді. Осындай жұмыс нәтижесінде системаның тепе-теңдігін бұзған сыртқы күш жойылады. Сонымен жұмыс - дегеніміз энергияны берудің макроскопиялық түрі екен. Олай болса, жұмыс жүргізілуі үшін сыртқы күштің болуы шарт. Енді осы ойды түсіндіру мақсатымен, газ көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмысты қарастырайық . *р\*бастапқы қысым — және V2 көлемі басым. Цилиндрдің *1*және *2*нүктесінде поршеньді ұстап тұратын шектеуіштер орнатылған делік. Поршеньге сырттан қысым түсірілсін, ол поршень астындағы, яғни цилиндр ішіндегі әуелгі қысымнан *р1*аз болсын: *р2<р1.*Егер 1-шектеуішті босатсақ, онда газдың көлемі ұлғайып, кысымның көлем өзгерісіне көбейтіндісіне тең шамадағы жұмыс атқарылады: A = р2- *(V2^ — V1) = р2=0*. Поршеньнің сыртқы қысымы ра азайған сайын, газ көлемінің ұлғаюы кезінде атқарылатын жұмыс шамасы да азаяды және р2 = 0 болса, А = 0. Ал, сыртқы қысым ішкі қысымнан шексіз аз мелшердегі қысымға ғана артық болса, онда ең көп жұмыс атқарылады, оны максималды жұмыс дейді.

Жылу - дегеніміз бір-біріне түйіскен денелердегі молекулаларың өзара соқтығысу (қақтығысу) арқылы, яғни система ішінде жылу алмасу жолымен энергияны беру, жеткізу түрі. Ал жылу алмасу — макроскопиялық не ретсіз қозғалыстағы бөлшектердің энергияны беру түрі. Жылудын, бағытын және өзара берілуін, қозғалысын температура көрсетеді.

Жұмыс (А) пен жылу (Q) ішкі знергия *(V)*сияқты системалардын қасиетін көрсетпейді, олар тек энер-гияны бір системадан екіншіге жеткізеді. Жылуды беру немесе жұмысты атқару үшін система өзін қоршаған ортамен не басқа системалармен әрекеттесуі кажет. Қөбіне, система өзін қоршаған ортамен не басқа системалармен әрекеттесуі кажет. Әдетте, система өзін қоршаған ортадан не басқа системадан жылу алса, жылуды және осы кездегі система атқарған жұмысты оң, ал кері жағдайда теріс дейді.  
 **Энтальпия.**Қөптеген процестерді термодинамикалық тұрғыдан қарастырғанда ішкі энергиямен қатарфункциясы да жиі кездеседі. Мұндағы *р —*система қысымы; 1/— система көлемі. Осы теңдеудің оң жағындағы көбейтіндіні *(рҮ)*системадағы потенциалды энергиямен тедестіруге болады. Энтальпияны “системадағы кеңейтілген энергия” немесе “жылу ұстағыш-тық” деп те айтады. Энтальпия да ішкі энергия сияқты система күйінің функциясы және оның процестер кезіндегі өзгеруі. Ол процестердің қалай, қандай жолмен өткеніне тәуелді емес, тек систе-маның бастапқы және соңғы күйіне байланысты. Энтальпияның абсолюттік мәнін анықтау мумкін емес. Өйткені оны өрнектейтін термодинамикалық теңдеу белгісіз және табуға мүмкіндік жок. Сондықтан да көптеген процестерде энтальпия мәнінің өзгеруі ға-на ескеріледі:

Энтальпия терминін 1909 жылы Оннес енгізген, ол гректід “эн”— ішкі және “тальпэ”— жылу деген сөздерінен алынған.

**Термодинамиканың бірінші заңы.**Термодинамиканың бірінші заңы (кейде оны термодинамиканың бірінші бастамасы дейді) негізінен энергияның сақталу және оның жылу процестеріне түрлену (айналу) заңы болып есептеледі. Демек, ол жылу мен жұмыстың өзгеруіне байланысты. Ал, энергияның сақталу заңы ғылымға көптен белгілі. Өйткені табиғаттың осы заңдылығы макросистемалардағы процестерге де, молекула саны аз қатынасатын өте кішкене системаларға да қолданылады. Ол, әуелі механи-кадағы жылу мен жүмыс арасындағы қатынастарды зерттеп, анықтау кезінде қалыптасып, бертін магниттік және электрлік энергиялардың байланысын түсіндіру үшін электрлік теорияда қолданылды. Осы айтылған екі жағдайда да жылу алмасу қарас-тырылмай, тек энергияның бір формадан екінші формаға ауысуы ғана алынған.

Макроскопиялық системалардағы энергияның өзгеруі тәжірибе көрсетіп отырғандай жылу алмасу формасында байқалады және сан түрлі жұмыс түрінде кездеседі. Көптеген әдістер арқылы бір күйден екінші күйге ауысқан жылу мен жұмыстың алгебралык. қосындысы өздерінін, тұрақты мәнін сактайды, ал процестерде ол нөлге тең. Жүргізілетін тәжірибелер нәтижесінен, термодинамика-ның бірінші заңы сипаттауды, дәлелдеуді керек етпейтін жорамал (постулат) екенін көреміз. Осыған сүйеніп системадағы ішкі энергияның қосындысы тек система күйіне ғана тәуелді функция екенін аламыз. Мысалы, жабық системаға белгілі мелшердегі жылу (Q) жібеірілді делік. Бүл жылу жалпы жағдайдағы системаның ішкі энергиясын *(U)*көбейтуге және сол системанын, істеген жұмысына кетеді. Демек, термодинамиканың бірінші занын былай тұжырымдауга болады. Кез еелген процестердігі системаның ішқі энергия өсімшесі, осы системаға берілген жылу мөлшерінен система аткарған жұмысты азайтканға тен:

U=Q-A (11)

Бұдан ішкі энергияның өзгеруі процестерді қалай, қандай жолмен жүргізгенге байланысты емес, системаның бастапқы және соңғы күйіне тәуелді екенін көреміз. Бұл, ішкі энергияның система күйінің функциясы екенін дәлелдейді. Егер функцияның мәні күй параметріне ғана байланысты болып, процестің бұрынғы күйімен анықталмаса, онда ол функцияны күй параметріне функциялы деп те айтады. Жылу мен жұмыс мұндай қасиет көрсетпейді, олар система күйінің функциясы емес және процестердщ қалай, қандай жолмен жүргізілгеніне тәуелді. Осы айтылғандарды нақтылай түсу үшін, термодинамиканьщ бірінші заңының дифференциалдық түрін математикалық өрнекпен көрсетейік:

dU=bQ-bA (12)

(10) және (11) теңдеулер— термодинамиканың бірінші заңының аналитикалық мәні. Оларды өткен ғасырдың ортасында, бір-бірінен тәуелсіз әуелі Р. Майер, сосын Д. Джоуль ашқан. Алғашында бұл теңдеулер тек механикалық жұмыстарды сипаттауға ғана қолданылған. Бертін келе Г. Гельмгольц оларды жалпы түрге ауыстырды. Бұл теңдеулердегі *А*кез келген жұмыс түрін көрсетеді. Ал, жалпы жұмыс мөлшері системаға әсер еткен күштердің қосындысының жүргізілген жұмыс жолына көбейтіндісіне тең. Газ өз көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмыстар жиірек қарастырылады.

МұндайдаbA=pdY және *А=S*pdvОсы жағдайда термодинамиканың бірінші заңын былайша өрнектеуге болады: (dU=Q-S= (2 —| немесе dU=dQ-pdY*.*Енді осы өрнекті басқа жұмыс түрлеріне қолданайық:

а) *р*жүгін dh биіктігіне көтергенде:

bA=pdh-mgdh

мұндағы m-масса, g-еркін тусу үдеуі.

Іен жүргізгенге байланысты емес, системаның бастапқы жән< оңғы күйіне тәуелді екенін көреміз. Бұл, ішкі энергияның сис ема күйінің функциясы екенін дәлелдейді. Егер функцияның мән үй параметріне ғана байланысты болып, процестің бұрынғы күйі Іен анықталмаса, онда ол функцияны күй параметріне функцияль ,еп те айтады. Жылу мен жұмыс мұндай қасиет көрсетпейді, ола{ истема күйінің функциясы емес және процестердщ қалай, қандаі шлмен жүргізілгеніне тәуелді. Осы айтылғандарды нақтылаі үсу үшін, термодинамиканьщ бірінші заңының дифференциалдьп үрін математикалық өрнекпен көрсетейік:

dU (12;

(10) және (11) теңдеулер— термодинамиканың бірінші заңы Іың аналитикалық мәні. Оларды өткен ғасырдың ортасында, бір іірінен тәуелсіз әуелі Р. Майер, сосын Д. Джоуль ашқан. Алға иында бұл теңдеулер тек механикалық жұмыстарды сипаттауғ; •ана қолданылған. Бертін келе Г. Гельмгольц оларды жалпы түрг Іуыстырды. Бұл теңдеулердегі *А*кез келген жұмыс түрін көрсете ;і. Ал, жалпы жұмыс мөлшері системаға әсер еткен күштердіі ;осындысының жүргізілген жұмыс жолына көбейтіндісіне тең. Га Із көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмыстар жиірек қарастырылады.

**Ең қысқа жол туралы есептер мысалында динамикалық программалау негізгі қағидалар. Беллман функциясы және Беллман теңдеуі**

Динамикалық программалау есебі бірнеше кезеңді болып табылады. Сондықтан динамикалық программалау термины есептің ерекше түрін анықтаумен қатар, сызықтық программалау есебіне жататын математикалық программалау есебінің жеке класстарының шешімін табу әдістерін сипаттайды.

**1 Динамикалық бағдарламау әдісі туралы ортақ мәліметтер**

Динамикалық бағдарламау әдісі америкалық математик Беллман және оның мектебімен жасалған. ДБӘ вариациялық есептерді сандық есептегіш машиналарды қолдануымен шығару процестерінде дамыған. Динамикалық бағдарламау есептерінің қойылымы Понтрягин максимум принципі сияқты. ДБӘ Беллман тиімділік принципінде құрылған «кез келген тиімді траекторияның кесіндісі тиімді траектория болып келеді», процестің болашақ тәртібі оның бұрынғы тарихынан тәуелсіз, басқаша айтқанда жүйенің болашақ тәртібі қазіргі уақыт мезетіндегі нысанның күйімен анықталады.

τ аралық нүктені алайық. Беллман тиімділік принципіне сәйкес біз -ден -ға дейінгі (2) екінші бөлікті аламыз, ол тиімді траектория болып келеді..

Осылайша Беллман тиімділік принципіне сәйкес екінші траектория болады.

**Үзіліссіз жүйелерге арналған басқару есептерін ДБӘ негізінде шығару**

;

; (1)

;

Тиімділік критерисі келесі түрде берілген.

. (2)

Басқару векторы (2) функционалына минимальді мән береді. I функционал минималь мәнін  арқылы белгілейік I функционал минимумы бастапқы шарттарға және басқару түріне тәуелді. (2) интегралының минимум мәнін беретін  бар деп ойлап, (2) түріндегі интегралды 2 интегралға бөлейік.

. (3)

Беллман тиімділік принципіне сәйкес егер  басқаруы  минимум интеграл берсе, ендеше осы басқару  минимум интеграл жеткізеді, сондықтан (3) өрнегін есептей отырып, жазайық

1

2

τ





t0=0

tK=T



0

z

x1

x3

, (4)

ондағы  бұл функция  бастапқы күйінен τ уақыт мезетіне тең, ендеше τ кішкентай шама деп есептейміз. τ уақыт кез келген траектория нүктесінде алуға болады.

, (5)

,



(5) өрнегіне соңғы өсімше формуласын қолданайық

y

М

f(ε)

x

а

x ε x+Δx b

f(B)

f(x+Δx)

f(ε)

f(x)

f(A)



; (6)

 ролін  ойнайды. (6) есептей (4) өрнегінен жазамыз.

; (7)

; (8)

U басқару вектор бойынша минимумды алу үшін (8) өрнегін дифференциалдайық

. (9)

(8) және (9) өрнектірінде  және  жүреді. Беллман тиімділік принципіне сәйкес бұл векторларды ,  ауыстыруға болады жеке туындыларда.

 (10)

(10) жүйесінде теңдеу сызықты емес дифференциалды теңдеу болып келеді, сондықтан бұл тәсілді қолдану кейбір жағдайларда күрделі есептеуді қажет етеді және осы түрде шығару кейде мүмкін емес, (10) теңдеулер қатарында бір теңдеуге келеді, ол үшін жүйеден жеке туындыны шығару керек:

; (11)

 үшін алынған өрнекті бірінші теңдеуге қойсақ, Беллман теңдеуін аламыз.

. (12)

Алынған (12) түріндегі теңдеуді динамикалық бағдарламау әдісімен шығарылған тиімді есептерге қолдануға болады.

Мысал:

Тиімділік критерийсіне арналған Беллман теңдеуін құрастырайық

 (1)

τ минимальді уақыт кезінде t=0 болғанда жүйені х1=0, х2=х2n күйінен х1=0, х2=0 күйіне ауыстыратын тиімді басқарудың алгоритмін табу қажет.Мына шектеулер болғанда

; (2)

Шешімі:

Тиімділік критерисі үшін Беллман теңдеуін құрайық.

, (3)

ондағы интеграл ішіндегі функция өрнегін анықталады

. (4)

Беллман теңдеулер жүйесін жазайық.

; (5)

; (6)

Функционал түрін белгілейік

 (7)

Жаңа координатаны есептеп, (1) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазайық:

 (8,9,10)

(8), (9) және (10) теңдеулер жүйесін есептесек, Беллман теңдеуі мына түрде болады

 (11,12)

U скаляр бойынша (11) теңдеуінің жеке туындысын алған соң, (12) өрнегі шықты, (12) өрнегінен U басқаруын білдіруге болады.

. (13)

U тиімді басқару үшін шыққан (13) өрнегі (8) жүйесінің бірінші өрнегіне қойылады.

. (14)

Динамикалық бағдарламау әдісінің қиындығы – жеке туындыларды іздеу. Бұл қиындықты болдырмау үшін, бірнеше тәсілдер қолданылады. (14) теңдеуінің шешімін ортақ түрде жазуға болады.

. (15)

х1, х2, х3 бойынша (15) жеке туындыларын іздейік.

; (16)

; (17)

; (18)

Шыққан жеке туындыларды (14) қоямыз

; (19)

(19) өрнегінен a1, а2, а3 анықтайық

; (20)

а3=1 коэффициентімен берейік

;  (21)

Табылған жеке туындылардың мәндерін (13) қойсақ, келесі тиімді басқарудың алгоритмін аламыз

. (22)

ондағы с1 және с2 коэффициенттері келесі түрде болады:

; .

**Р.Беллман принципі бойынша динамикалық программалау**

**есебінің алгоритмі**

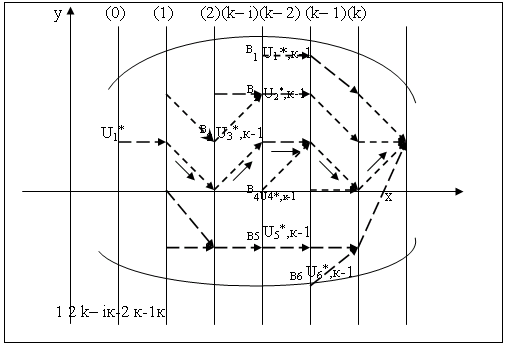
Кейбір белгілеулер еніземіз және ары қарай болжауға көшеміз. S жүйесінің k-шы қадамдағы (k = 1,и) жағдайын S жүйесін бастапқыдан соңғысына өтуді қамтамасыз ететін uk басқаруын жүргізу нәтижесінде алынған x(k) сандар жиынтығымен анықталады деп есептейік. S жүйесі өткен жағдай берілген жағдайдан және таңдалынған басқарудан тәуелді және S жүйесі бұл жағдайға қалай өткенінен тәуелсіз деп есептейміз.

Егер k-шы қадамды жүзеге аыруда жүйенің бастапқы жағдайынан және таңдалған басқарудан тәуелді белгілі бір пайда қамтамасыз етілсе, онда n қадамдағы жалпы пайда пайдлардың қосындысымен анықтлады. Осылайша динамикалық программалаудың қарастырлып отырған есебін қанағатандыратын екі шарт құрылған. Бірінші шартты кейінгі қозғалыстың болмау шарты, ал екіншісін есептің мақсат функциясының аддитивтілігі шарты деп атайды.

Есеп басқарудың тиімді стратегиясын, яғни жүзеге асыру нәтижесінде S жүйесі n қадамда бастапқы жағдайдан кейінгісіне өтетін W(u) пайда функциясының ең үлкен жиынтығы.

Беллман тиімділік принципі. *Кезекті қадам алдында жүйенің жағдайы қандай болмасын, басқаруды бұл қадамдағы пайдаға барлық қадамдағы оңтайлы пайданы қосқанда ең үлкен болатындай етіп таңдау қажет.*

20 суретте Р.Беллманның оптималдық принципі көрсетілген.



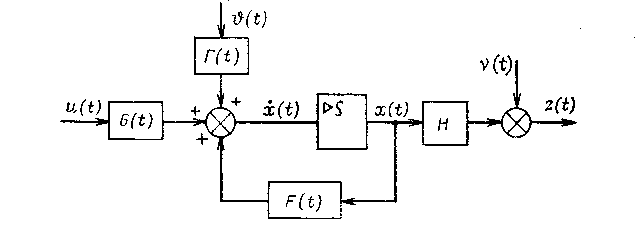
20 сурет- Біртіндеп оңтайлы басқату принципі.

III.Тиімді басқару және вариоционды санау

Динамикалық жүйелердің сызықтық моделдері

Қозғалыс теңдеуіне кіретін айнымалылар көпөлшемді, яғни векторлық шама болғандықтан, онда теңдеу векторлық болып табылады, демек жеткілікті күрделі. Жағдай тереңдей түседі, егер g — сызықтық емес функция болса. Осында векторлық дифференциалды теңдеулерді шешу әдістері тек сызықтық жүйелер үшін жақсы өңделгендіктен, тек ОУ сызықтық динамикалық моделін қарастырумен шектелеміз, g функциясы сызықтық емес болса, онда сызықтандыруға болады деп аламыз.

g сызықтық функциясы үшін дифференциалды теңдеуді векторлық түрде беруге болады ( 21 сурет)



21 сурет- Сызықтық динамикалық жүйенің құрылымы

Суретте *z(t)*—өлшеу векторы; Н — жағдай векторын өлшеу векторымен байланыстыратын матрица; *v(t)*— көбіне кедергі деп аталатын бақылау қателігінің векторы.

Ракета ұшуын басқарудың динамика проблемасы ұзақ уақыт ішінде жөндеу теориясынанн тыс дамыған. Бұл бағыттың жөндеу теориясымен бірігуі елуінші жылдары басқару теориясына алып келді.